もう一つのゲーデル埋め込みを考える

ー　技術的詳細と哲学的興味

岡本 賢吾（Kengo Okamoto）・山﨑 紗紀子（Sakiko Yamasaki）
・三上 温湯（Onyu　Mikami）
東京都立大学・東京都立大学
・東京都立大学

本講演の発表者となっている 3 名は、昨年度——他学会（科学基礎論学会）の大会ではあるが——ワークショップ「基礎づけ言語としての直観主義論理：その拡張を考える」を行った（ただし、大会中止のため、見なし開催）。本発表は、その後の共同研究の進展を報告しようとするものであるが、もちろん上記ワークショップの内容を前提するわけではなく、あくまでも今回だけで self-contained なプレゼンを行う予定である。

現代（少なくともここ半世紀程度）におけるように、古典論理のみならず、直観主義論理、最小論理、関連論理、線形論理、矛盾許容諸論理、等々、相異なる論理体系が、それぞれ十分な理論的価値を持つものとして遇されるようになり、とりわけ、それらの論理のかなりのものが、単なる「実験的な試作品」に終わらず、一定の特徴的な適用を持つようになってくると、その結果ますます、そもそも論理ということについて私たちはどのような統一的理解を作り出すができるのか、作り出すべきなのか、という哲学的疑問が、その切迫性を増してくると言ってよいだろう。

この問題を追究する上で重要となる一つの点は、異なった論理体系を相互に比較するための適切な方法を用意することであると思われる。そうした比較方法の典型は、当の体系間に翻訳を定義することだと言ってよいであろう。このような翻訳の最も古典的な事例は、改めて述べるまでもなく、ゲーデルが 1930 年代に行った仕事、すなわち、直観主義論理（以下 IL）の様相論理体系 S4（以下 S4）への埋め込みに他ならない。ゲーデルは、IL から S4 への次のような翻訳(_)g を定義した。

$p\,g = \Box p$（p は原子式、または⊥）　　　$(\Phi\wedge\Psi)\,g = \Phi g\wedge\Psi g$
$(\Phi\vee\Psi)\,g = \Phi g\vee\Psi g$　　　$(\Phi\rightarrow\Psi)\,g = \Box(\Phi g\supset\Psi g)$
$(\forall x\Phi)\,g = \Box\forall x\,(\Phi)\,g$　　　$(\exists x\Phi)\,g = \exists x\,(\Phi)\,g$

この翻訳の下で、次のような証明論的等価性、すなわち、

［＊］　$\Gamma \vdash_{IL} \Phi$　iff.　$(\Gamma)\,g \vdash_{S4} (\Phi)\,g$

が成り立つ（ゲーデル自身は左→右を示したのみだが、後年、右→左もモデル論的に証明され、更に後に証明論的に証明された）。

上記［＊］は、IL の最も特徴的な結合子と言ってよい→と∀とが、実はそれぞれ、S4 の様相演算子付き結合子□（_⊃_）と□∀（_）とに親近的なものであることを示唆していよう。しかしながら、より精確に考え直すと、両者の関係は決して単純ではないことが判る。例えば、モデル理論（クリプキ意味論）的に見れば、→と□（_⊃_）は明瞭

に区別される。よく知られている通り、IL について健全かつ完全であるようなクリプキ意味論においては、定義により、原子式に対する valuation はモノトニックなもののみに限られ(1)、その結果、例えばΦ→Ψもまた、モノトニックであるようなモデルしか持たないが、しかし S4 では、モノトニックでない valuation のモデルが許容されており、とりわけ（Φ→Ψ）g＝□（(Φ）g⊃（Ψ）g）は、そのような非モノトニックなモデルを持つ（そうしたモデルの様々の可能世界で真となる）からである。要するに、言語哲学などにおいて馴染み深い用語で言い換えれば、両者は、その真理条件（強制条件）がはっきりと異なる、ということである。

以上の状況を踏まえたとき、自然に思いつく改訂案の一つは、埋め込み先として採用されている S4 を論理的にもう少し強化すること、言い換えれば、適切な様相論理的な公理ないし推論規則を付加することで、この受け入れ側の言語自身が、モノトニックな valuation のモデルしか持たなくなるように制限することである。具体的には、こうした公理ないし推論規則として、次のようなものを考えることができよう（ここではシークエント計算スタイルで定式化しておく）。

［Mon］　p を原子式または⊥とするとき、

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; p}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Box p}$$

埋め込み先を、この規則を加えた言語（MonS4 と呼んでおく）に変更すれば、翻訳規則（(_) m とする）ももっと単純化され、次のようになることが判る（原子式の場合について、□を付する必要がなくなっている）。

$p g = p$　（p は原子式、または⊥）　　$(\Phi \wedge \Psi) g = \Phi g \wedge \Psi g$

$(\Phi \vee \Psi) g = \Phi g \vee \Psi g$　　$(\Phi \rightarrow \Psi) g = \Box (\Phi g \supset \Psi g)$

$(\forall x \Phi) g = \Box \forall x (\Phi) g$　　$(\exists x \Phi) g = \exists x (\Phi) g$

併せて言えば、S5 に Mon を加えた MonS5 を考えれば、同じ翻訳（）m を用いて、古典論理の埋め込みを行うことも考えられるだろう。本発表では、こうしたアイデアの技術的結果について、もう少し詳しく報告する。併せて、こうした様相埋め込みの可能性ということが、論理概念の哲学的究明に対して一体どのような興味ある洞察をもたらすのかを、可能な範囲で検討する。

［注］

(1)　クリプキモデルM＝（W，R）において、valuation v がモノトニックであるとは、次のことである。

任意 s の原子式 p、任意の w，u∈Wについて、もしも w R u かつ w |= p ならば、そのとき、u |= p。